itüdergisi/***d***
mühendislik
Cilt:7, Sayı:3, 38-50
Haziran 2008

Hasarlı malzemelerin mikrogerme teorisi ile modellenmesi ve Eshelby tansörleri

Ahmet KIRIŞ*, Esin İNAN
İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Mekanik Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada hasarlı malzemeler mikrogermeli ortam teorisi ile modellenerek tanımlanmış ve ortaya çıkan bilinmeyen malzeme katsayıları, kompozit malzemeler ve hasarlı malzeme arasında kurulan analoji ile hesaplanmaya çalışılmıştır. Bu amaç için kullanılan homojenleştirme yöntemlerinin çoğunda ilgili Eshelby tansörlerinin bulunması öncelikli problemlerden biridir. Bu nedenle bu çalışmada da Eshelby tansörlerinin küresel katkı maddeleri içeren mikrogermeli ortam için bulunması problemi ele alınmıştır. Bu amaca ulaşmak için öncelikle mikrogerme teorisi ile modellenen bir ortamın yerdeğiştirme, mikrodönme ve hacimsel mikrogenleşme büyüklükleri için temel çözümler verilmiştir. Bu temel çözümler kullanılarak katkı maddelerinin varlığından kaynaklanan elastik alanlar Green fonksiyonları yardımıyla elde edilmiştir. Son olarak bu elastik alanların mikrogermeli ortamın bünye denklemlerinde kullanılması ile klasik teoride verilen Eshelby tansörleri mikrogermeli ortama genelleştirilmiştir. Klasik elastisitede benzer problem için tek bir Eshelby tansörü elde edilirken, mikrogermeli ortam için dördü dört, ikisi iki boyutlu ve biri de skaler olmak üzere toplam yedi Eshelby tansörü elde edilmiştir. Klasik Eshelby tansörü elipsoidal katkı maddeleri içinde homojen olmasına rağmen, mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri küresel katkı maddeleri içinde bile homojen değildir. Çalışmada, mikrogermeli ortamın mikrodönme ile ilgili malzeme sabitlerinin sıfır alınması durumunda mikrogenleşen ortam için Eshelby tansörlerinin elde edilebildiği gösterilmiştir. Ayrıca mikrogermeli ortamın mikrogenleşme ile ilgili malzeme sabitlerinin sıfır alınması durumunda mikropolar ortamın Eshelby tansörlerine ve her iki grup mikro ortamın malzeme sabitlerinin sıfır alınması durumunda ise klasik elastisite için elde edilen Eshelby tansörlerine indirgendikleri de görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: *Eshelby tansörleri, hasarlı malzeme, mikrogermeli ortam, homojenleştirme yöntemleri.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Ahmet KIRIŞ. kiris@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 92.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Mekanik Programında tamamlanmış olan "Hasarlı malzemelerin mikro elastik teorilerle modellenmesi ve Eshelby tansörleri" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 24.01.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 08.03.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 01.02.2009 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Modelling the damage by microstretch theory and Eshelby tensors

Extended abstract

Eshelby tensors for the materials modelled by micropolar theory including spherical inclusions are given by Cheng and He (1995). Later on similar work is carried on for microelongation theory by Kiris and Inan (2005). It is assumed that the material particles undergo only microrotation in micropolar theory and volumetric microelongation in microelongation theory in addition to the classical components. Although it is more meaningful to model damaged materials with microelongation theory rather than micropolar theory, because growth of the voids reflects the damage phenomena better than their rotation, both theories are not good enough to model the damaged materials. The reason of the improperness of modelling also with the microelongation theory is that the voids volumetric ratio is very low and thus modelling with microelongation theory accounts only volumetric micro elongation of the whole body. Therefore, to model the damaged materials with microstretch theory is a better approach (Kiris and Inan, 2006).

In the present work, the damaged materials are modelled by the microstretch theory, developed by Eringen (1990) by assuming that the material particles can make both microrotation and volumetric microelongation, in addition to the classical bulk deformation. Then, the concept of Eshelby tensors which constitutes the basis of most of the homogenization methods, is extended to microstretch theory to use the analogy between damaged materials with composites which is proposed by Inan (1998). Then we present the fundamental solutions for the displacement and the microrotation vectors and the microelongation scalar in static case, and extend the "eigenstrain" and "microeigenstrain" concepts to the microstretch theory. With the help of these solutions and Green's functions technique, the elastic fields of the material defined by microstretch theory due to the existence of the spherical inclusions are calculated. By substituting these elastic fields to the strain expressions of the microstretch theory, Eshelby tensors for microstretch medium having spherical inclusions, are obtained.

In this work, seven Eshelby tensors, as four of them in four dimension, two in two dimension and one scalar are obtained for the microstretch theory, as oppose of the four Eshelby tensors all in four dimension for micropolar theory, four Eshelby tensors as one in four dimension, two in two dimension and one scalar for microelongation theory and lastly one Eshelby tensor in four dimension for the classical theory of elasticity. Furthermore, Eshelby tensors obtained for microstretch theory reduce to Eshelby tensors for micropolar theory, while all microelongational material constants are taken as zero, and correspondingly reduce to Eshelby tensors for microelongation theory, while all micropolar material constants are taken as zero, and finally reduce to the classical Eshelby tensors while all micro material constants are taken as zero. These tensors are not homogeneous in even spherical inclusions as of micropolar and microelongation theories, unlike their classical forms. Besides, the results of the microstretch theory show that, the field quantities related with both micropolar and microelongation theories have contribution to Eshelby tensors corresponding to "eigenstrain" due to macro deformations, but it is observed that the field quantities related with microelongation theory do not have any contribution to Eshelby tensors corresponding to "microeigenstrain" due to microrotation. And in the same way the field quantities related with micropolar theory also do not have any contribution to Eshelby tensors corresponding to "micro-eigenstrain" due to micro elongation.

The main objective of obtaining Eshelby tensors for these micro theories is to determine the effective properties of the materials modelled with micro elastic theories by use of these tensors in the homogenization methods. Although our starting point was to use these tensors in damage mechanics, all the obtained results are quite general. Namely, Eshelby tensors obtained for the micro elastic theories may be used to determinate effective properties of composite materials as well as the damaged materials. Since Eshelby tensors obtained for all the micro theories are not homogeneous, one can not express the homogenization process analytically, unlike the Eshelby tensors obtained for classical case. It is expected that the homogenization methods like Mori-Tanaka's method can be extended to these micro theories by taking average processes and integrating over the inclusions.

Keywords: *Eshelby tensors, damaged materials, microstretch medium, homogenization methods.*

Giriş

Bilindiği gibi klasik sürekli ortamlar teorisi mikro yapılı malzemelerin modellenmesinde yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, mikro yapıdaki süreksizliklerin etkili olduğu problemler için sürekli ortam varsayımları yeniden düzenlenerek değişik teoriler üretilmiştir. Eringen ve Şuhubi (1964) tarafından tanımlanan ve malzemenin her mikro parçacığının genel klasik şekil değiştirmeye ek ve ondan bağımsız olarak mikro düzeyde bir şekil değiştirme yapabildiği fikrine dayanan mikromorfik teori mikro yapıda süreksizlikler içeren malzemeler için gerçekleri iyi yansıtan bir teori olarak kabul edilmiştir. Ancak, gerek malzeme sabiti sayısının fazlalığı gerekse de ek bünye denklemlerine olan gereksinim nedeniyle mikromorfik teori lineer durumda bile oldukça karmaşıktır ve çok sayıda bilinmeyen içermektedir. Eringen (1999) tarafından bu tür güçlüklerin üstesinden gelebilmek ve teorinin uygulamada kullanılabilirliğini artırmak için özelleştirmeler yapılmış ve mikropolar ve mikrogermeli ortam tanımları verilmiştir. Her iki teori de malzemelerin doğal yapısına uygunluğu nedeniyle geniş ölçüde kullanım alanı bulmuştur.

Bu çalışmada, hasar malzemede atomik bağların mikro ölçekte kopması ile ortaya çıkan kusurların büyümesi, gelişmesi, birleşmesi ve giderek makro yapı üzerinde belirgin etkileri olan bozuklukların oluşması olarak tanımlanmıştır. Bu tanım altında hasarlı malzeme, maddesel parçacıkların klasik şekil değiştirmeye ek olarak sadece hacimsel mikrogenleşme ve mikrodönme yapabildiği varsayılan mikrogermeli ortam teorisi ile modellenmiş ve efektif malzeme sabitlerini belirleyebilmek amacıyla İnan (1998) tarafından hasarlı malzeme ile kompozit malzemeler arasında kurulan analojiden yola çıkarak geliştirilen bir yaklaşım izlenmiştir. Efektif malzeme sabitlerinin belirlenmesi amacıyla kullanılan homojenleştirme yöntemlerinin hemen hepsinin temeli, konunun öncülerinden Eshelby (1959) tarafından tanımlanan "eşdeğer dönüşüm tansörü" kavramına dayanmaktadır. Eshelby eşdeğer dönüşüm tansörü katkı maddesinin serbest genlemesi ile matris genlemesi arasındaki ilişkiyi vermektedir ve klasik elastisite teorisinde elipsoidal bir katkı maddesi içinde homojendir.

Cheng ve He (1995) küresel katkı maddeleri içeren mikropolar bir ortam için Eshelby tansörlerini elde etmişlerdir. Ancak mikropolar teori, malzeme özeliklerinin iyileştirilmesi için matris malzemesinden daha iyi elastik özeliklere sahip katkı maddelerinin ortama katıldığı parçacıklı kompozitlerin ve sıvı kristallerin modellenmesi için uygunsa da, hasarın gelişimini yeterince yansıtamadığı için hasarlı malzemelerin modellenmesinde uygun olmamaktadır. Bu eksikliği gidermek için Kırış ve İnan (2005) tarafından, hasarın mikrodönmeye oranla daha çok hacimsel mikrogenleşme yapabildiği öngörüsüyle, hasarlı malzemenin mikrogenleşen ortam teorisi ile modellenmesi düşünülmüştür. Bu modelin mikropolar ortam modeline göre daha gerçekçi olduğu açıktır. Ancak malzemede hasarlı yani boşluklu kısmın, özellikle mikro hasarlar düşünüldüğünde malzemenin kalan kısmının hacmine oranı hayli düşüktür. Bu durumda sadece hasarlı kısmın mikrogenleşme yapacağını düşünerek hareket etmek yani malzemeyi mikrogenleşen ortam olarak modelleme düşüncesi de hem pratikte hem de teoride sıkıntılar ortaya çıkarmaktadır. Bu durum, Kırış ve İnan (2006) tarafından, hasarlı malzeme mikrogermeli ortam teorisi ile modellenerek giderilmeye çalışılmıştır.

Bu çalışmada (Kırış ve İnan, 2006), mikropolar ve mikrogenleşen ortam için izlenilene benzer yöntemle, küresel katkı maddesi içeren mikrogermeli ortam için temel çözümler elde edilmiştir. Bu temel çözümler yardımıyla ve Green fonksiyonları tekniği kullanılarak dördü dört boyutlu, ikisi iki boyutlu ve biri de skaler olmak üzere toplam yedi Eshelby tansörü elde edilmiştir. Ayrıca, beklendiği gibi makro şekil değiştirmeden kaynaklanan ekgenleme ile ilgili Eshelby tansörlerinde hem mikrodönme hem de mikrogenleşme ile ilgili büyüklüklerin katkısı gözlenirken, mikrodönmeden kaynaklanan mikroekgenleme ile ilgili Eshelby tansörlerine mikrogenleşme ile ilgili büyüklüklerden hiç katkı gelmediği gözlenmiştir. Benzer olarak, mikrogenleşmeden kaynaklanan mikroekgenleme ile ilgili Eshelby tansörlerine de mikrodönme ile ilgili alan büyüklüklerinden hiçbir katkı gelmemektedir. Beklendiği gibi, mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinin mikrodönme ile ilgili sabitlerin limit durumunda mikrogenleşen ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine, mikrogenleşme sabitlerinin limit durumunda mikropolar Eshelby tansörlerine ve tüm mikro sabitlerin limit durumunda klasik Eshelby tansörlerine indirgendiği gösterilmiştir. Mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri de, mikrogenleşme ve mikropolar durumda olduğu gibi, klasik Eshelby tansörlerinin aksine, küresel katkı maddeleri üzerinde bile homojen değillerdir (Kırış ve İnan, 2006).

Mikrogermeli ortamın lineer bünye denklemleri

Mikrogermeli ortamın statik durumda lineer alan denklemleri

$$t_{kl,k} + f_l = 0, \tag{1a}$$

$$m_{kl,k} + e_{lkm} t_{km} + l_l = 0, \tag{1b}$$

$$m_{k,k} + t - s + l = 0 \tag{1c}$$

olarak yazılabilir. Burada t_{kl} gerilme tansörünü, s_{kl} ve m_{kl} gerilme moment tansörlerini, m_k mikrogerme vektörünü, f_k, l_k ve l sırasıyla kütle kuvvetlerini, kütle moment yoğunluklarını ve kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunu göstermektedir ve $t = t_{kk}$, $s = s_{kk}$ dir (Eringen, 1999). Ayrıca, burada ve bundan sonra aksi belirtilmedikçe tekrarlanan indisler üzerinde toplama uylaşımı olduğu ve “,” sembolünün izleyen indise göre türevi gösterdiği kabul edilecektir.

Mikrogermeli ortamın lineer bünye denklemleri ise (Eringen, 1999),

$$t_{kl} = A^s_{kl}\,\theta + A^s_{mkl}\,\theta_{,m} + A_{klmn}\,\varepsilon_{mn} + C_{klmn}\,\gamma_{mn}, \tag{2a}$$

$$m_{kl} = B^s_{lk}\,\theta + B^s_{mlk}\,\theta_{,m} + C_{mnlk}\,\varepsilon_{mn} + B_{lkmn}\,\gamma_{mn}, \tag{2b}$$

$$m_k = C^s_k\,\theta + C^s_{kl}\,\theta_{,l} + A^s_{klm}\,\varepsilon_{lm} + B^s_{klm}\,\gamma_{lm}, \tag{2c}$$

$$s - t = C^s\,\theta + C^s_k\,\theta_{,k} + A^s_{kl}\,\varepsilon_{kl} + B^s_{kl}\,\gamma_{kl} \tag{2d}$$

ile verilmektedir. Burada u_k yerdeğiştirme, ϕ_k mikrodönme vektörleri ve θ hacimsel mikro genleşme skaleri olup, δ_{kl} Kronecker deltası ve e_{klm} permütasyon sembolüdür. Bu tanımlarla

$$\varepsilon_{kl} = u_{l,k} + e_{lkm}\phi_m, \quad \gamma_{kl} = \phi_{k,l}, \quad \gamma_k = 3\,\theta_{,k} \tag{3}$$

genleme tansörlerini ve

$$\begin{aligned}
&A^s_{klm} = 0, \quad B^s_{kl} = 0, \quad A^s_{kl} = \lambda_0\,\delta_{kl}, \quad B^s_{klm} = b_0\,e_{klm}, \\
&C^s = \lambda_1, \quad C^s_{kl} = a_0\,\delta_{kl}, \quad C^s_k = 0, \quad C_{klmn} = 0, \\
&A_{klmn} = \lambda\,\delta_{kl}\,\delta_{mn} + (\mu + \frac{\kappa}{2})\,\delta_{km}\,\delta_{ln} + (\mu - \frac{\kappa}{2})\,\delta_{kn}\,\delta_{lm}, \\
&B_{klmn} = \alpha\,\delta_{kl}\,\delta_{mn} + \beta\,\delta_{kn}\,\delta_{lm} + \gamma\,\delta_{km}\,\delta_{ln},
\end{aligned} \tag{4}$$

izotrop mikrogermeli ortamın malzeme sabiti tansörlerini göstermektedir. Burada λ, μ Lamé sabitleri, κ, α, β ve γ mikropolar ortamın ve a_0, b_0, λ_0 ve λ_1 mikrogenleşen ortamın malzeme sabitleridirler.

(2) bünye denklemleri (3) ve (4) ifadeleri ile birlikte (1) denklemlerinde kullanılırsa izotrop homojen mikrogermeli ortamın alan denklemleri

$$\begin{aligned}
&\lambda_0\,\theta_{,l} + \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}\right) u_{k,lk} + \left(\mu + \frac{\kappa}{2}\right) u_{l,kk} \\
&+ \kappa\,e_{lkm}\,\phi_{m,k} + f_l = 0,
\end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \beta)\,\phi_{k,lk} + \gamma\,\phi_{l,kk} + \kappa\,e_{lkm}\,u_{m,k} \\
&-2\,\kappa\,\phi_l + l_l = 0,
\end{aligned} \tag{5b}$$

$$a_0\,\theta_{,kk} - \lambda_1\,\theta - \lambda_0\,u_{k,k} + l = 0 \tag{5c}$$

elde edilir.

Temel çözümler

Mikrogermeli ortamın statik durumda (5) alan denklemleri Galerkin (1930) gösterimi ile,

$$\begin{aligned}
&\Diamond_1 = (\lambda + 2\mu)\,\Delta, \quad \Diamond_2 = (\mu + \frac{\kappa}{2})\,\Delta,\\
&\Diamond_3 = (\alpha + \beta + \gamma)\,\Delta - 2\,\kappa,\\
&\Diamond_4 = \gamma\,\Delta - 2\,\kappa, \quad \Diamond_6 = a_0\,\Delta - \lambda_1
\end{aligned} \tag{6}$$

operatör tanımları yapılarak

$$\mathbf{M}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \theta \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l \end{bmatrix} \tag{7}$$

şeklinde yazılabilir. Sandru (1966) çözümlerine benzer şekilde, (7) matris denkleminin çözümü,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{N}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{N} = \left[n_{kl}\right]_{7\times 7} \tag{8}$$

olarak elde edilir. Burada verilmeyen **M** matris operatörü Kırış ve İnan (2006)' da görülebilir. **M** operatörünün tersi

$$\mathbf{M}^{-1} = \left[n_{kl}\right]\left(\Box_3\,\Box_4\,\Box_7\right)^{-1} \tag{9}$$

operatörü ile verilmekte ve bileşenleri,

$$\begin{aligned}
&n_{\underline{kk}} = \Box_7\left(\Box_1 - \Box_2\,X_k^2\right), \quad k = 1,2,3,\\
&n_{\underline{kk}} = \Box_4\left(\Box_5 - \Box_6\,X_{k-3}^2\right), \quad k = 4,5,6,\\
&n_{77} = \Box_3\,\Box_7\,\Box_8,\\
&n_{kl} = n_{lk} = -\Box_2\,\Box_7\,X_k\,X_l, k \neq l, k,l = 1,2,3,\\
&n_{kl} = n_{lk} = -\Box_4\,\Box_6\,X_{k-3}\,X_{l-3}, k \neq l, k,l = 4,5,6\\
&n_{7k} = -n_{k7} = \Box_3\,\Box_7\,\lambda_0\,X_k, k = 1,2,3,\\
&n_{14} = n_{25} = n_{36} = n_{41} = n_{52} = n_{63}\\
&= n_{7k} = n_{k7} = 0, \qquad k = 4,5,6\\
&n_{15} = -n_{24} = n_{42} = -n_{51} = \Box_4\,\Box_7\,\kappa\,X_3,\\
&n_{16} = -n_{34} = n_{43} = -n_{61} = -\,\Box_4\,\Box_7\,\kappa\,X_2,\\
&n_{26} = -n_{35} = n_{53} = -n_{62} = \Box_4\,\Box_7\,\kappa\,X_1
\end{aligned} \tag{10}$$

'dir ve tekrarlanan indisler üzerinde toplama yoktur. Burada,

$$\begin{aligned}
&\Box_1 = \Diamond_1\Diamond_4\Diamond_6 + \lambda_0^2\,\Diamond_4\,\Delta,\\
&\Box_2 = \left[\lambda_0^2 + \left(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2}\right)\Diamond_6\right]\Diamond_4 - \kappa^2\,\Diamond_6,\\
&\Box_3 = \Diamond_2\Diamond_4 + \kappa^2\,\Delta, \qquad \Box_4 = \Diamond_1\Diamond_6 + \lambda_0^2\,\Delta,\\
&\Box_5 = \Diamond_2\Diamond_3, \qquad \Box_6 = \left[(\alpha + \beta)\,\Diamond_2 - \kappa^2\right],\\
&\Box_7 = \Diamond_3, \qquad \Box_8 = \Diamond_1,
\end{aligned} \tag{11}$$

olarak tanımlanmışlardır.

(7) ve (8) denklemlerinin sağ tarafındaki büyüklükler arasında,

$$\Box_3\,\Box_4\,\Box_7\,\mathbf{F} = -\mathbf{f}, \tag{12a}$$

$$\Box_3\,\Box_4\,\Box_7\,\mathbf{L} = -\mathbf{l}, \tag{12b}$$

$$\Box_3\,\Box_4\,\Box_7\,L = -l \tag{12c}$$

ilişkileri bulunmaktadır. (8) çözümleri,

$$\boldsymbol{\varphi} = \Diamond_3\mathbf{F}, \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^* = \left[\Diamond_1\Diamond_6 + \lambda_0^2\Delta\right]\mathbf{L}, \tag{13b}$$

$$\varphi^{**} = \left[\Diamond_2\Diamond_4 + \kappa^2\Delta\right]L \tag{13c}$$

tanımlarıyla

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} = {} & \Diamond_4\left(\Diamond_1\,\Diamond_6 + \lambda_0^2\,\Delta\right)\boldsymbol{\varphi} - \kappa\,\Diamond_3\nabla\times\boldsymbol{\varphi}^* - \lambda_0\,\Diamond_3\,\nabla\,\varphi^{**}\\
& -\left\{\lambda_0^2\,\Diamond_4 + \left[(\lambda + \mu - \frac{\kappa}{2})\,\Diamond_4 - \kappa^2\right]\Diamond_6\right\}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi},
\end{aligned} \tag{14a}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi} = {} & \Diamond_2\Diamond_3\boldsymbol{\varphi}^* - \left[\left(\alpha + \beta\right)\Diamond_2 - \kappa^2\right]\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}^*\\
& -\kappa\left(\Diamond_1\Diamond_6 + \lambda_0^2\Delta\right)\nabla\times\boldsymbol{\varphi},
\end{aligned} \tag{14b}$$

$$\theta = \lambda_0\left(\Diamond_2\,\Diamond_4 + \kappa^2\Delta\right)\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi} + \Diamond_1\Diamond_3\varphi^{**} \tag{14c}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, (12) ve (13) ifadelerinden

$$\left(\Diamond_1\Diamond_6+\lambda_0^2\Delta\right)\left(\Diamond_2\Diamond_4+\kappa^2\Delta\right)\boldsymbol{\varphi}=-\mathbf{f}, \tag{15a}$$

$$\Diamond_3\left(\Diamond_2\Diamond_4+\kappa^2\Delta\right)\boldsymbol{\varphi}^*=-\mathbf{l}, \tag{15b}$$

$$\Diamond_3\left(\Diamond_1\Diamond_6+\lambda_0^2\Delta\right)\varphi^{**}=-l \tag{15c}$$

ilişkileri elde edilir.

İlk olarak, kütle momentleri yoğunluğunun ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunun sıfır ve kütle kuvvetleri alanının irrotasyonel, yani

$$\mathbf{f}=\nabla\pi_0, \tag{16a}$$

$$\mathbf{l}=\mathbf{0}, \tag{16b}$$

$$l=0 \tag{16c}$$

olduğu kabulü ve

$$\left(\Diamond_2\Diamond_4+\kappa^2\,\Delta\right)\boldsymbol{\varphi}=\nabla\Lambda_0 \tag{17}$$

tanımı ile (14) ve (15) ifadelerinden,

$$\mathbf{u}=\nabla\Diamond_6\Lambda_0, \tag{18a}$$

$$\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0}, \tag{18b}$$

$$\theta=\lambda_0\nabla\cdot\left(\nabla\Lambda_0\right) \tag{18c}$$

çözümlerine ve

$$\left(\Diamond_1\Diamond_6+\lambda_0^2\,\Delta\right)\Lambda_0=-\pi_0 \tag{19}$$

ilişkisine ulaşılır.

Benzer şekilde kütle momentleri yoğunluğunun ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunun yine sıfır ve kütle kuvvetlerinin solenoidal, yani

$$\mathbf{f}=\nabla\times\boldsymbol{\pi}, \tag{20a}$$

$$\mathbf{l}=\mathbf{0}, \tag{20b}$$

$$l=0 \tag{20c}$$

olduğu kabulü ve

$$\left(\Diamond_1\Diamond_6+\lambda_0^2\,\Delta\right)\boldsymbol{\varphi}=\nabla\times\boldsymbol{\Lambda} \tag{21}$$

tanımı ile (14) ve (15) ifadelerinden

$$\mathbf{u}=\nabla\times\left(\Diamond_4\,\boldsymbol{\Lambda}\right), \tag{22a}$$

$$\boldsymbol{\phi}=-\kappa\nabla\times\left(\nabla\times\boldsymbol{\Lambda}\right), \tag{22b}$$

$$\theta=0 \tag{22c}$$

çözümleri ve

$$\left(\Diamond_2\Diamond_4+\kappa^2\Delta\right)\boldsymbol{\Lambda}=-\boldsymbol{\pi} \tag{23}$$

sonucu elde edilir.

İkinci olarak, kütle momentleri yoğunluğunun irrotasyonel ve kütle kuvvetleri alanının ve kuvvet yoğunluğunun sıfır, yani

$$\mathbf{f}=\mathbf{0}, \tag{24a}$$

$$\mathbf{l}=\nabla\pi_0^*, \tag{24b}$$

$$l=0 \tag{24c}$$

olduğu kabulü ve

$$\left(\Diamond_2\Diamond_4+\kappa^2\,\Delta\right)\boldsymbol{\varphi}^*=\nabla\Lambda_0^* \tag{25}$$

tanımı ile (14) ve (15) ifadelerinden

$$\mathbf{u}=\mathbf{0}, \tag{26a}$$

$$\boldsymbol{\phi}=\nabla\Lambda_0^*, \tag{26b}$$

$$\theta=0 \tag{26c}$$

çözümleri ve

$$\Diamond_3\,\Lambda_0^*=-\pi_0^* \tag{27}$$

sonucu elde edilir.

Kütle momentleri yoğunluğunun solenoidal ve kütle kuvvetlerinin ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunun sıfır, yani

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{28a}$$

$$\mathbf{l} = \nabla \times \boldsymbol{\pi}^*, \tag{28b}$$

$$l = 0 \tag{28c}$$

olduğu kabulü ve

$$\Diamond_3\, \boldsymbol{\varphi}^* = \nabla \times \boldsymbol{\Lambda}^* \tag{29}$$

tanımı ile (14) ve (15) ifadelerinden

$$\mathbf{u} = -\kappa \nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{\Lambda}^*\right), \tag{30a}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \nabla \times \left(\Diamond_2\, \boldsymbol{\Lambda}^*\right), \tag{30b}$$

$$\theta = 0 \tag{30c}$$

çözümlerine ve

$$\left(\Diamond_2 \Diamond_4 + \kappa^2 \Delta\right) \boldsymbol{\Lambda}^* = -\boldsymbol{\pi}^* \tag{31}$$

denklemine ulaşılır.

Üçüncü olarak, kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun sıfırdan farklı ve kütle kuvvetleri alanının sıfır, yani

$$\mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{32a}$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{0}, \tag{32b}$$

$$l \neq 0 \tag{32c}$$

olduğu kabulü ve

$$\Diamond_3 \varphi^{**} = \Lambda_0^{**} \tag{33}$$

tanımı ile (14) ve (15) ifadelerinden

$$\mathbf{u} = -\lambda_0 \nabla \Lambda_0^{**}, \tag{34a}$$

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}, \tag{34b}$$

$$\theta = \Diamond_1 \Lambda_0^{**} \tag{34c}$$

çözümlerine ve

$$\left(\Diamond_1 \Diamond_6 + \lambda_0^2 \Delta\right) \Lambda_0^{**} = -l \tag{35}$$

denklemine ulaşılır.

Statik durumda, sınırsız elastik malzemede (5) denge denklemindeki yerdeğiştirme, mikro dönme ve mikrogenleşme alanlarının çözümlerini elde etmek için, öncelikle kütle kuvveti alanının koordinat merkezinde yoğunlaşmış tekil kuvvet olduğu kabulü yapılır.

Bu durumda kütle kuvveti,

$$\mathbf{f} = \mathbf{q}\, \delta(x_1, x_2, x_3) \tag{36}$$

ile verilir, burada $\delta(x_1, x_2, x_3)$ Dirac delta fonksiyonudur. Helmholtz ayrıştırımı uygulanarak, kütle kuvveti,

$$\mathbf{f} = \nabla \pi_0 + \nabla \times \boldsymbol{\pi}, \qquad \nabla \bullet \boldsymbol{\pi} = 0 \tag{37}$$

olarak tanımlanırsa, (36) ve (37) ifadelerinin (19) ve (23) denklemlerinde kullanılması ve

$$h_1^2 = \frac{\left(\mu + \frac{\kappa}{2}\right)\gamma}{2\mu\kappa}, \quad B_1 = \frac{\kappa}{\mu(2\mu+\kappa)},$$
$$h_2^2 = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2\kappa}, \quad B_2 = (\lambda+2\mu)\lambda_1 - \lambda_0^2 \tag{38}$$
$$h_3^2 = \frac{(\lambda+2\mu)a_0}{B_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad r = |\mathbf{r}|$$

tanımları ile

$$\left[(\lambda+2\mu)a_0 \Delta^2 - \left((\lambda+2\mu)\lambda_1 - \lambda_0^2\right)\Delta\right]\Lambda_0 = \frac{1}{4\pi}\mathbf{q}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \tag{39a}$$

$$\left[\left(\mu + \frac{\kappa}{2}\right)\gamma \Delta^2 - 2\mu\kappa\Delta\right]\boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{q}\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \tag{39b}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri

$$\Lambda_0 = -\frac{1}{8\pi B_2}\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{r}\right) - \frac{h_3^2}{4\pi B_2}\mathbf{q}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}(1-e^{-r/h_3})\right) \quad (40a)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{1}{16\pi\mu\kappa}\nabla\times(\mathbf{q}r) + \frac{h_1^2}{8\pi\mu\kappa}\nabla\times\left(\frac{\mathbf{q}}{r}(1-e^{-r/h_1})\right) \quad (40b)$$

olarak bulunurlar. Sadece kütle kuvvetinin varlığı ve kütle merkezinde tekil olarak uygulandığı durumdaki çözümün elde edilmesi için irrotasyonel ve solenoidal durumda elde edilen (18) ve (22) çözümlerinin toplamı olarak

$$\mathbf{u} = (a_0\,\Delta - \lambda_1)\nabla\Lambda_0 + (\gamma\,\Delta - 2\kappa)\nabla\times\mathbf{\Lambda}, \qquad (41a)$$

$$\boldsymbol{\phi} = -\kappa\nabla\times(\nabla\times\mathbf{\Lambda}), \qquad (41b)$$

$$\theta = \lambda_0\,\nabla\cdot(\nabla\Lambda_0) \qquad (41c)$$

elde edilir. Bu ifadede (40) çözümleri kullanılarak yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogenleşme alanları için sonuç çözümler bir dizi basitleştirme işlemi sonrasında

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = {} & \frac{(\lambda+3\mu)\lambda_1-\lambda_0^2}{8\pi\mu B_2}\frac{\mathbf{q}}{r} + \frac{a_0}{4\pi B_2}\frac{\mathbf{q}}{r^3} + \\ & \frac{(\lambda+\mu)\lambda_1-\lambda_0^2}{8\pi\mu B_2}\frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} - \frac{3a_0}{4\pi B_2}\frac{(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \\ & -\frac{\lambda_0^2}{4\pi(\lambda+2\mu)B_2}\frac{\mathbf{q}}{r}e^{-r/h_3} \\ & +\frac{a_0}{4\pi B_2}\nabla\times\nabla\times\left(\frac{\mathbf{q}}{r}e^{-r/h_3}\right) \\ & +\frac{\lambda_1(\lambda+2\mu)a_0}{4\pi B_2^2}\nabla\times\nabla\times\left(\frac{\mathbf{q}}{r}(1-e^{-r/h_3})\right) \\ & -\frac{\gamma}{16\pi\mu^2}\nabla\times\nabla\times\left(\frac{\mathbf{q}}{r}(1-e^{-r/h_1})\right),\end{aligned} \qquad (42a)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{8\pi\mu}\nabla\times\left(\frac{\mathbf{q}}{r}(1-e^{-r/h_1})\right), \qquad (42b)$$

$$\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi B_2}\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\lambda_0}{4\pi B_2}\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{r}e^{-r/h_3}\right) \qquad (42c)$$

olarak elde edilirler.

(5) denklemlerini çözmek için ikinci olarak, kütle momentleri yoğunluğunun koordinat merkezinde tekil olarak uygulandığı kabulü yapılır. Bu durumda

$$\mathbf{l} = \mathbf{p}\,\delta(x_1, x_2, x_3) \qquad (43)$$

ile verilen kütle momentleri yoğunluğu ifadesi ve Helmholtz ayrıştırımı

$$\mathbf{l} = \nabla\pi_0^* + \nabla\times\boldsymbol{\pi}^*, \qquad \nabla\bullet\boldsymbol{\pi}^* = 0 \qquad (44)$$

kullanılarak, (27) ve (31) denklemleri

$$[(\alpha+\beta+\gamma)\Delta - 2\kappa]\Lambda_0^* = \frac{1}{4\pi}\mathbf{p}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (45a)$$

$$\left[\left(\mu+\frac{\kappa}{2}\right)\gamma\Delta^2 - 2\mu\kappa\Delta\right]\mathbf{\Lambda}^* = \frac{1}{4\pi}\mathbf{p}\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (45b)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemlerin çözümleri

$$\Lambda_0^* = -\frac{1}{8\pi\kappa}\mathbf{p}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}(1-e^{-r/h_2})\right) \qquad (46a)$$

$$\mathbf{\Lambda}^* = \frac{1}{16\pi\mu\kappa}\nabla\times(\mathbf{p}r) + \frac{h_1^2}{8\pi\mu\kappa}\nabla\times(\frac{\mathbf{p}}{r}(1-e^{-r/h_1})) \qquad (46b)$$

olarak elde edilir. Sadece kütle momentleri yoğunluğu kütle merkezinde yoğunlaştırılarak uygulandığında (26) ve (30) çözümlerinin toplamından

$$\mathbf{u} = -\kappa\nabla\times(\nabla\times\mathbf{\Lambda}^*), \qquad (47a)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \nabla\Lambda_0^* + \left(\mu+\frac{\kappa}{2}\right)\Delta\nabla\times\mathbf{\Lambda}^*, \qquad (47b)$$

$$\theta = 0 \qquad (47c)$$

olarak bulunur. Bu ifadede (46) çözümleri kullanıldığında, sadeleştirme sonrası

$$\mathbf{u}=\frac{1}{8\pi\,\mu}\nabla\times\left(\frac{\mathbf{p}}{r}(1-e^{-r/h_1})\right) \tag{48a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}=&\frac{1}{4\pi\,(\alpha+\beta+\gamma)}\left(\frac{\mathbf{p}}{r}e^{-r/h_2}\right)\\&-\frac{1}{8\pi\,\kappa}\nabla\times\nabla\times\left(\frac{\mathbf{p}}{r}(1-e^{-r/h_2})\right)\\&+\frac{(2\mu+\kappa)}{16\pi\,\mu\,\kappa}\nabla\times\nabla\times\left(\frac{\mathbf{p}}{r}(1-e^{-r/h_1})\right),\end{aligned} \tag{48b}$$

$$\theta=0 \tag{48c}$$

çözümleri elde edilir.

Son olarak, (5) denklemlerini çözmek için mikrogerme kuvvet yoğunluğunun koordinat merkezinde tekil olarak uygulandığı, yani

$$\nabla l=\overline{\mathbf{l}}=\overline{\mathbf{p}}\,\delta(x_1,x_2,x_3) \tag{49}$$

olduğu kabul edilir ve bu ilişki (35) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\left\{(\lambda+2\mu)\,a_0\,\Delta^2-\left[(\lambda+2\mu)\lambda_1-\lambda_0^2\right]\Delta\right\}\Lambda_0^{**}=\\&\frac{1}{4\pi}\overline{\mathbf{p}}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\end{aligned} \tag{50}$$

denklemi elde edilir ve bu denklemin çözümü de

$$\begin{aligned}\Lambda_0^{**}=&-\frac{1}{8\pi\,B_2}\left(\frac{\overline{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{r}}{r}\right)\\&-\frac{h_3^2}{4\pi\,B_2}\overline{\mathbf{p}}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}(1-e^{-r/h_3})\right)\end{aligned} \tag{51}$$

olarak elde edilir. Bu sonuç (34) denklemlerinde kullanılırsa basitleştirme işlemleri sonrasında

$$\begin{aligned}\mathbf{u}=&\frac{\lambda_0}{8\pi B_2}\left[\frac{\overline{\mathbf{p}}}{r}-\frac{(\overline{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3}\right]-\frac{\lambda_0}{4\pi B_2}\left(\frac{\overline{\mathbf{p}}}{r}e^{-r/h_3}\right)\\&+\frac{\lambda_0\,h_3^2}{4\pi\,B_2}\nabla\times\nabla\times\left(\frac{\overline{\mathbf{p}}}{r}(1-e^{-r/h_3})\right),\end{aligned} \tag{52a}$$

$$\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0}, \tag{52b}$$

$$\theta=-\frac{(\lambda+2\mu)}{4\pi\,B_2}\nabla\cdot\left(\frac{\overline{\mathbf{p}}}{r}(1-e^{-r/h_3})\right) \tag{52c}$$

elde edilir.

Katkı maddesinden kaynaklanan elastik alanlar

Mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorisine benzer şekilde, katkı maddeleri içeren sonsuz mikrogermeli ortamda "ekgenleme-eigenstrain" ve "mikroekgenleme-microeigenstrain" kavramları

$$\varepsilon_{kl}^t=\varepsilon_{kl}^*\,\Lambda(\Omega),\quad \gamma_{kl}^t=\gamma_{kl}^*\,\Lambda(\Omega),\quad \theta^t=\theta^*\,\Lambda(\Omega), \tag{53}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\Lambda(\Omega)=\begin{cases}1, & \mathbf{x}\in\Omega\\ 0, & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3-\Omega\end{cases} \tag{54}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Malzemede katkı maddelerindeki ekgenlemeler nedeniyle mikrogermeli ortamın (2) bünye denklemleri

$$\begin{aligned}t_{kl}=&A_{kl}^s(\theta-\theta^t)+A_{mkl}^s(\theta_{,m}-\theta_{,m}^t)\\&+A_{klmn}(\varepsilon_{mn}-\varepsilon_{mn}^t)+C_{klmn}(\gamma_{mn}-\gamma_{mn}^t),\end{aligned} \tag{55a}$$

$$\begin{aligned}m_{kl}=&B_{lk}^s(\theta-\theta^t)+B_{mlk}^s(\theta_{,m}-\theta_{,m}^t)\\&+C_{mnlk}(\varepsilon_{mn}-\varepsilon_{mn}^t)+B_{lkmn}(\gamma_{mn}-\gamma_{mn}^t),\end{aligned} \tag{55b}$$

$$\begin{aligned}m_k=&C_k^s(\theta-\theta^t)+C_{kl}^s(\theta_{,l}-\theta_{,l}^t)\\&+A_{klm}^s(\varepsilon_{lm}-\varepsilon_{lm}^t)+B_{klm}^s(\gamma_{lm}-\gamma_{lm}^t),\end{aligned} \tag{55c}$$

$$\begin{aligned}s-t=&C^s(\theta-\theta^t)+C_k^s(\theta_{,k}-\theta_{,k}^t)\\&+A_{kl}^s(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^t)+B_{kl}^s(\gamma_{kl}-\gamma_{kl}^t)\end{aligned} \tag{55d}$$

şeklinde yeniden yazılmalıdır. Bünye denklemlerindeki bu farklılık (5) denge denklemlerine;

$$\lambda_0\,\theta_{,l}+\left(\lambda+\mu-\frac{\kappa}{2}\right)u_{k,kl}+\left(\mu+\frac{\kappa}{2}\right)u_{l,kk} \qquad (56a)$$
$$+\kappa\in_{lkm}\phi_{m,k}+f_l+f_l^t=0,$$

$$(\alpha+\beta)\phi_{k,kl}+\gamma\,\phi_{l,kk}+\kappa\in_{lkm}u_{m,k} \qquad (56b)$$
$$-2\kappa\phi_l+l_l+l_l^t=0,$$

$$a_0\,\theta_{,kk}-\lambda_1\,\theta-\lambda_0\,u_{k,k}+l+l^t=0 \qquad (56c)$$

şeklinde yansır. (56) denklemlerinde “^{t}” üst indisli büyüklükler (5) denge denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} &f_l^t=-t_{kl,k}^t,\ m_{kl}^t=B_{mlk}^s\,\theta_{,m}^t+B_{lkmn}\,\gamma_{mn}^t,\\ &l_l^t=-m_{kl,k}^t-e_{lkm}\,t_{km}^t,\ m_k^t=C_{kl}^s\,\theta_{,l}^t+B_{klm}^s\,\gamma_{lm}^t,\\ &l^t=-m_{k,k}^t-t^t+s^t,\ t_{kl}^t=A_{kl}^s\,\theta^t+A_{klmn}\,\varepsilon_{mn}^t,\\ &s^t-t^t=C^s\,\theta^t+A_{kl}^s\,\varepsilon_{kl}^t, \end{aligned} \qquad (57)$$

olarak elde edilirler.

(56) denklemlerinden çözüme ulaşmak için önce sadece kütle kuvvetlerinin, sonra sadece kütle momentleri yoğunluğunun ve ardından da sadece kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulandığı düşünülüp elde edilen çözümler süperpoze edilmelidir. Burada bilinmeyen **u** yerdeğiştirmesi, **ϕ** mikrodönmesi ve θ mikrogenleşmesi Green fonksiyonları tekniği kullanılarak belirlenebilir. Karşı gelen problem için klasik elastisitede bir, mikropolar ve mikrogenleşen ortamlarda dört, mikrogermeli ortamda ise yedi Green fonksiyonu yeterlidir.

Birinci grup Green fonksiyonları için gerekli denklemler, koordinat merkezine sadece **f** kütle kuvvetlerinin uygulandığı, **l** kütle momentleri yoğunluğu ve l mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulanmadığı varsayılarak;

$$\lambda_0\,g_{n,l}+\left(\lambda+\mu-\frac{\kappa}{2}\right)\mathcal{G}_{kn,kl}+\left(\mu+\frac{\kappa}{2}\right)\mathcal{G}_{ln,kk} \qquad (58a)$$
$$+\kappa\,e_{lkm}\,G_{mn,k}+\delta_{ln}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=0,$$

$$(\alpha+\beta)\,G_{kn,kl}+\gamma\,G_{ln,kk}+\kappa\,e_{lkm}\,\mathcal{G}_{mn,k} \qquad (58b)$$
$$-2\kappa\,G_{ln}=0,$$

$$a_0\,g_{n,kk}-\lambda_1\,g_n-\lambda_0\,\mathcal{G}_{kn,k}=0 \qquad (58c)$$

şeklinde elde edilir.

İkinci grup denklemler ise, koordinat merkezine sadece **l** kütle momentlerinin uygulandığı ve **f** kütle kuvvetleri ve l mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulanmadığı varsayılarak

$$\lambda_0\,\hat{g}_{n,l}+\left(\lambda+\mu-\frac{\kappa}{2}\right)\hat{\mathcal{G}}_{kn,kl}+\left(\mu+\frac{\kappa}{2}\right)\hat{\mathcal{G}}_{ln,kk} \qquad (59a)$$
$$+\kappa\,e_{lkm}\,\hat{G}_{mn,k}=0,$$

$$(\alpha+\beta)\,\hat{G}_{kn,kl}+\gamma\,\hat{G}_{ln,kk}+\kappa\,e_{lkm}\,\hat{\mathcal{G}}_{mn,k} \qquad (59b)$$
$$-2\kappa\,\hat{G}_{ln}+\delta_{ln}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=0,$$

$$a_0\,\hat{g}_{n,kk}-\lambda_1\,\hat{g}_n-\lambda_0\,\hat{\mathcal{G}}_{kn,k}=0 \qquad (59c)$$

olarak elde edilir.

Son grup denklemleri elde etmek için sisteme, sadece l mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulandığı ve **f** kütle kuvvetleri ve **l** kütle momentleri yoğunluğunun ise uygulanmadığı kabul edilerek

$$\lambda_0\,\hat{\hat{g}}_{n,l}+\left(\lambda+\mu-\frac{\kappa}{2}\right)\hat{\hat{\mathcal{G}}}_{kn,kl}+\left(\mu+\frac{\kappa}{2}\right)\hat{\hat{\mathcal{G}}}_{ln,kk} \qquad (60a)$$
$$+\kappa\,e_{lkm}\,\hat{\hat{G}}_{mn,k}=0,$$

$$(\alpha+\beta)\,\hat{\hat{G}}_{kn,kl}+\gamma\,\hat{\hat{G}}_{ln,kk}+\kappa\,e_{lkm}\,\hat{\hat{\mathcal{G}}}_{mn,k} \qquad (60b)$$
$$-2\kappa\,\hat{\hat{G}}_{ln}=0,$$

$$a_0\,\hat{\hat{g}}_{n,kk}-\lambda_1\,\hat{\hat{g}}_n-\lambda_0\,\hat{\hat{\mathcal{G}}}_{kn,k} \qquad (60c)$$
$$+\delta_{kn}\,I_k\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=0$$

denklemleri elde edilir. Burada, mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorilerine benzer şekilde “^” ’sız büyüklüklerin sadece kütle kuvvetlerinin, “ ˆ ” lı büyüklükler sadece kütle momentleri yoğunluğunun ve “ ˆ̂ ” ’ lı büyüklükler ise sadece kütle mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulandığı duruma karşı gelmek üzere $\mathcal{G}_{kn}$, $\hat{\mathcal{G}}_{kn}$ ve $\hat{\hat{\mathcal{G}}}_{kn}$ Green fonksiyonları u_k yerdeğiştirmelerine, G_{kn}, $\hat{G}_{kn}$ ve $\hat{\hat{G}}_{kn}$ Green fonksiyonları ϕ_k mikrodönmelerine, g_n, $\hat{g}_n$ ve $\hat{\hat{g}}_n$ Green fonksiyonları ise θ mikrogenleşmelerine karşı gelmektedir. (58)-(60) denklemlerinin çözümü

$$\mathcal{G}_{kn} = \mathcal{G}_{kn}^C + \mathcal{G}_{kn}^P + \mathcal{G}_{kn}^E, \tag{61a}$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{kn} = G_{kn} = -\frac{1}{8\pi\mu} e_{knl} \left(\frac{1-e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,l}, \tag{61b}$$

$$\hat{\hat{\mathcal{G}}}_{kn} = \frac{\lambda_0(\lambda+2\mu)a_0}{4\pi B_2^2} \left[\frac{r_{,kn}}{2h_3^2} + \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,kn} \right] \tag{61c}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{kn} &= \frac{1}{16\pi\mu} \left(\frac{1-e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,kn} \\ &+ \left(\frac{e^{-r/h_2} - e^{-r/h_1}}{8\pi\kappa r} \right)_{,kn} + \frac{(2\mu+\kappa)e^{-r/h_1}\,\delta_{kn}}{16\pi\mu\kappa h_1^2 r}, \end{aligned} \tag{61d}$$

$$\hat{\hat{G}}_{kn} = \hat{g}_n = 0, \tag{61e}$$

$$g_n = -\frac{\lambda_0}{4\pi B_2} \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,n}, \tag{61f}$$

$$\hat{\hat{g}}_n = -\frac{\lambda+2\mu}{4\pi B_2} \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,n} \tag{61g}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\mathcal{G}_{kn}^C = \frac{1}{8\pi\mu} \left(2\frac{\delta_{kn}}{r} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} r_{,kn} \right), \tag{62a}$$

$$\mathcal{G}_{kn}^P = \frac{B_1}{4\pi} \left[-h_1^2 \left(\frac{1-e^{-r/h_1}}{r} \right)_{,kn} - \delta_{kn} \frac{e^{-r/h_1}}{r} \right], \tag{62b}$$

$$\mathcal{G}_{kn}^E = \frac{a_0 \lambda_0^2}{4\pi B_2^2} \left[\frac{1}{h_3^2} \frac{r_{,kn}}{2} + \left(\frac{1-e^{-r/h_3}}{r} \right)_{,kn} \right] \tag{62c}$$

dir ve sırasıyla klasik, mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorileri için elde edilen Green fonksiyonları ile aynıdır. Ayrıca, (61) ifadelerinden görüleceği gibi f_k kütle kuvvetlerinin uygulanması durumunda u_k yerdeğiştirmelerine karşı gelen $\mathcal{G}_{kn}$ Green fonksiyonunun klasik, mikropolar ve mikrogenleşme durumlarına karşı gelen Green fonksiyonlarının toplamı olarak elde edildiğine, dahası, beklendiği üzere l_k kütle momentleri yoğunluğunun uygulanması durumunda θ mikrogenleşmesine karşı gelen $\hat{g}_n$ Green fonksiyonunun ve karşıt olarak l mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulanması durumunda ise ϕ_k mikrodönmesine karşı gelen $\hat{\hat{G}}_{kn}$ Green fonksiyonunun sıfır olarak elde edildiğine dikkat edilmelidir.

Buradan, (56) denklemlerinin çözümü olan **u** yerdeğiştirmelerini, ϕ mikrodönmelerini ve θ mikrogenleşmesini Green fonksiyonları cinsinden elde etmek için;

$$\bar{F}_k = f_k^t + f_k, \tag{63a}$$

$$\bar{L}_k = l_k^t + l_k, \tag{63b}$$

$$\bar{L} = l^t + l \tag{63c}$$

olmak üzere, karşıtlık teoremi;

$$\begin{aligned} &\int_V \left(\bar{F}_k\, u_k^{'} - \bar{F}_k^{'}\, u_k \right) dV + \int_V \left(\bar{L}_k\, \phi_k^{'} - \bar{L}_k^{'}\, \phi_k \right) dV \\ &+ \int_V \left(\bar{L}\, \theta^{'} - \bar{L}^{'}\, \theta \right) dV = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

uygulanır ve (64) ifadesinde sırasıyla;

$$\begin{aligned} &\left\{ u_k^{'}, \phi_k^{'}, \theta^{'}, \bar{F}_k^{'}, \bar{L}_k^{'}, \bar{L}^{'} \right\} \\ &= \left\{ \mathcal{G}_{kn}, G_{kn}, g_n, \delta_{kn}\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\ 0,\ 0 \right\}, \\ &= \left\{ \hat{\mathcal{G}}_{kn}, \hat{G}_{kn}, \hat{g}_n = 0,\ 0,\ \delta_{kn}\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\ 0 \right\}, \\ &= \left\{ \hat{\hat{\mathcal{G}}}_{kn}, \hat{\hat{G}}_{kn} = 0,\ \hat{\hat{g}}_n,\ 0,\ 0,\ \delta_{kn}\ \mathrm{I}_k\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \right\} \end{aligned} \tag{65}$$

olarak alınır. f_k^t, l_k^t ve l^t büyüklükleri kütle kuvvetlerinin, kütle momentleri yoğunluklarının ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunun olmadığı durumda sırasıyla hayali kütle kuvvetleri, kütle momentleri yoğunlukları ve mikrogerme kuvvet yoğunluğu olarak kabul edilebilirler. Dolayısıyla kütle kuvvetleri, kütle momentleri yoğunluğu ve mikrogerme kuvvet yoğunluğunun uygulanmadığı ve sınır terimlerin sıfır olduğu kabul edilerek, kısmi integrasyon işlemleri yapılırsa;

$$u_n(\mathbf{x}) = -\int_V \Big[\lambda_0\, \theta^t\, \mathcal{G}_{kn,k} + A_{klmp}\, \varepsilon_{mp}^t\, \mathcal{G}_{ln,k} + B_{klmp}\, \gamma_{mp}^t\, G_{kn,l} - \kappa\, e_{pmk}\, \varepsilon_{mp}^t\, G_{kn} + a_0\, \theta^t\, g_{n,kk} - \lambda_1\, \theta^t\, g_n - \lambda_0\, \delta_{mp}\, \varepsilon_{mp}^t\, g_n \Big] d\mathbf{x}', \quad (66a)$$

$$\phi_n(\mathbf{x}) = -\int_V \Big[\lambda_0\, \theta^t\, \hat{\mathcal{G}}_{kn,k} + A_{klmp}\, \varepsilon_{mp}^t\, \hat{\mathcal{G}}_{ln,k} + B_{klmp}\, \gamma_{mp}^t\, \hat{G}_{kn,l} - \kappa\, e_{pmk}\, \varepsilon_{mp}^t\, \hat{G}_{kn} \Big] d\mathbf{x}', \quad (66b)$$

$$\theta(\mathbf{x}) = -\int_V \left[\frac{1}{I_n} \Big(\lambda_0\, \theta^t\, \hat{\hat{\mathcal{G}}}_{kn,k} + A_{klmp}\, \varepsilon_{mp}^t\, \hat{\hat{\mathcal{G}}}_{ln,k} + a_0\, \theta^t\, \hat{\hat{g}}_{n,kk} - \lambda_1\, \theta^t \hat{\hat{g}}_n - \lambda_0\, \delta_{mp}\, \varepsilon_{mp}^t\, \hat{\hat{g}}_n \Big) \right] d\mathbf{x}' \quad (66c)$$

sonuçlarına ulaşılır.

(53) denklemlerinde ε_{kl}^* ekgenlemelerinin ve γ_{kl}^*, θ^* mikroekgenlemelerinin katkı maddesi Ω üzerinde sabit olduğu kabul edilirse (66) denklemleri (Eshelby, 1959, Cheng ve He, 1995)

$$u_n(\mathbf{x}) = u_n^C(\mathbf{x}) + I_{nkl}(\mathbf{x})\, \varepsilon_{kl}^* + J_{nkl}(\mathbf{x})\, \gamma_{kl}^* + K_n(\mathbf{x})\theta^*, \quad (67a)$$

$$\phi_n(\mathbf{x}) = \hat{I}_{nkl}(\mathbf{x})\, \varepsilon_{kl}^* + \hat{J}_{nkl}(\mathbf{x})\, \gamma_{kl}^*, \quad (67b)$$

$$\theta(\mathbf{x}) = \hat{\hat{I}}_{kl}(\mathbf{x})\, \varepsilon_{kl}^* + \hat{\hat{K}}(\mathbf{x})\, \theta^* \quad (67c)$$

şeklinde yazılabilir, burada $u_n^C(\mathbf{x})$ klasik elastik şekil değiştirmedir ve ilgili katsayılar kısaltma amacıyla burada verilmeyen katsayılar (Kırış ve İnan, 2006)' da bulunabilir.

Eshelby tansörleri

Yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogenleşme için elde edilen (67) çözümleri mikrogermeli ortamın (3) genleme büyüklüklerinde yerine konduğunda katkı maddelerinin varlığı nedeniyle oluşan genleme ve mikrogenleşme ifadeleri;

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) = K_{klmn}(\mathbf{x})\, \varepsilon_{mn}^* + L_{klmn}(\mathbf{x})\, \gamma_{mn}^* + M_{kl}(\mathbf{x})\, \theta^* \quad (68a)$$

$$\gamma_{kl}(\mathbf{x}) = \hat{K}_{klmn}(\mathbf{x})\, \varepsilon_{mn}^* + \hat{L}_{klmn}(\mathbf{x})\, \gamma_{mn}^*, \quad (68.b)$$

$$\theta(\mathbf{x}) = \hat{\hat{K}}_{kl}(\mathbf{x})\, \varepsilon_{kl}^* + \hat{\hat{M}}(\mathbf{x})\, \theta^* \quad (68.c)$$

şeklinde yazılabilir. $K_{klmn}(\mathbf{x}), L_{klmn}(\mathbf{x}), M_{kl}(\mathbf{x}), \hat{K}_{klmn}(\mathbf{x}), \hat{L}_{klmn}(\mathbf{x}), \hat{\hat{K}}_{kl}(\mathbf{x})$ ve $\hat{\hat{M}}(\mathbf{x})$ mikro genleşen ortamın Eshelby tansörleridirler ve

$$K_{klmn}(\mathbf{x}) = I_{lmn,k}^C(\mathbf{x}) + I_{lmn,k}(\mathbf{x}) - e_{klp}\, \hat{I}_{pmn}(\mathbf{x}) \quad (69a)$$

$$L_{klmn}(\mathbf{x}) = J_{lmn,k}(\mathbf{x}) - e_{klp}\, \hat{J}_{pmn}(\mathbf{x}) \quad (69b)$$

$$M_{kl}(\mathbf{x}) = K_{l,k}(\mathbf{x}) \quad (69c)$$

$$\hat{K}_{klmn}(\mathbf{x}) = \hat{I}_{kmn,l}(\mathbf{x}) \quad (69d)$$

$$\hat{L}_{klmn}(\mathbf{x}) = \hat{J}_{kmn,l}(\mathbf{x}) \quad (69e)$$

$$\hat{\hat{K}}_{kl}(\mathbf{x}) = \hat{\hat{I}}_{kl}(\mathbf{x}) \quad (69f)$$

$$\hat{\hat{M}}(\mathbf{x}) = \hat{\hat{K}}(\mathbf{x}) \quad (69g)$$

ifadeleri ile verilirler (Kırış ve İnan, 2006).

Sonuçlar

(68) – (69) ifadelerinden görüldüğü gibi mikrogermeli ortamda yedi Eshelby tansörü elde edilmektedir ve beklendiği gibi karşılıklı olarak; mikrodönme ifadesine mikrogenleşme büyüklüğünden, mikrogenleşme ifadesine de mikrodönmeden kaynaklanan bir katkı gelmemektedir. Ayrıca mikrogermeli ortam için elde edilen (69) Eshelby tansörü ifadelerinin,

mikrogenleşmeye ait büyüklüklerin sıfır alınması durumunda, mikropolar ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine indirgendiği görülmektedir. Benzer şekilde, mikrodönmeye ait büyüklüklerin sıfır alınması durumunda, mikrogenleşen ortam için elde edilen Eshelby tansörlerine ve hem mikrodönme hem de mikrogenleşme büyüklüklerinin sıfır alınması durumunda ise, doğrudan klasik Eshelby tansörlerine indirgendiği açık olarak görülmektedir. (Kırış ve İnan, 2005 ve 2006; Cheng ve He 1995). Ayrıca, mikropolar ve mikrogenleşen ortam teorileri için elde edilen Eshelby tansörlerine benzer şekilde, mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri de, küresel katkı maddeleri içinde bile homojen değillerdir.

Klasik teoriye benzer şekilde, gerek Cheng ve He (1995) tarafından elde edilen mikropolar ortam için Eshelby tansörlerinde, gerekse de Kırış ve İnan (2005 ve 2006) tarafından elde edilen mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörlerinde, temel amaç homojenleştirme yöntemlerinin bu teoriler için de kullanılmasına olanak sağlayarak, hasarlı malzemenin klasik ve mikro elastik sabitlerinin belirlenebilmesidir. Her ne kadar bu çalışmada hasarlı malzeme temel alınmışsa da, elde edilen sonuçlar geneldir ve sadece hasarlı malzemeler için değil, parçacıklı kompozitler gibi mikro elastik teorilerle modellenmesi daha uygun olan tüm malzemeler için yapılan homojenleştirme işlemlerinde kullanılabilir. Ancak bunun için sadece Eshelby tansörlerinin elde edilmesi yeterli olmamakta ve klasik çerçevede Mori-Tanaka (1973) teorisi gibi homojenleştirme yöntemlerinin bahsedilen bu mikro elastik teorilere genelleştirilmesi gerekmektedir. Bu amacın önündeki en büyük engel ise, klasik durumda Eshelby tansörlerinin, hemen birçok farklı şekli ifade etmek için yeterli olan elipsoidal katkı maddeleri içinde homojen olmalarına ve böylelikle homojenleştirme işleminin analitik olarak ifade edilebilmesine rağmen, mikropolar, mikro-genleşen ve mikrogermeli ortam teorilerinde elde edilen Eshelby tansörlerin küresel katkı maddeleri içinde bile homojen olmamalarıdır. Bu durum, bahsedilen mikro teoriler için homojenleştirme işleminin analitik olarak yapılabilmesini engellemekte ve ancak sayısal integrasyon ve ortalama alma işlemleri ile sonuca ulaşılabilmektedir. Ancak, her üç teori için de homojenleştirme problemi hala tam olarak çözülebilmiş değildir ve gelecek çalışmaları beklemektedir. Gerek mikropolar, gerekse de mikrogenleşen ve mikrogermeli ortam için elde edilen Eshelby tansörleri kullanılarak homojenleştirme probleminin bu mikro teorilere genişletilmesi ve böylece bu teorilerle modellenen malzemelerin efektif modüllerinin bulunabilmesi beklenmektedir.

Kaynaklar

Cheng, Z.Q., ve He, L.H., (1995). Micropolar elastic fields due to a spherical inclusion, *International Journal of Engineering Science,* **33**, 389-397.

Eringen, A.C. ve Şuhubi, E.S., (1964). Nonlinear theory of simple micro-elastic solids-I. *International Journal of Engineering Science,* **2**, 189-203.

Eringen, A.C., (1990). Theory of thermo-microstretch elastic solids, *International Journal of Engineering Science,* **28**, 1291-1301.

Eringen, A.C., (1999). *Microcontinuum Field Theories: Foundations and Solids*, Springer Verlag, New York.

Eshelby, J.D., (1959). The elastic field outside an ellipsoidal inclusion, *Proceedings of the Royal Society of London*, **A252**, 561-569.

Galerkin, B., (1930). Contribution á la solution générale du probléme de la théorie de l'élasticité dans le cas de trios dimension, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **190**, 1047-1048.

İnan, E., (1998). Thermo-microstretch model of damage mechanics, *Proceedings of the 9th International Symposium on Continuum Models and Discrete Systems*, CMDS9, İstanbul, Turkey.

Kırış, A. ve İnan, E., (2005). Eshelby tensors for a spherical inclusion in microelongated elastic fields, *International Journal of Engineering Science,* **43**, 49-58.

Kırış, A., ve İnan, E., (2006). Eshelby tensors for a spherical inclusion in microstretch elastic fields, *International Journal of Solids and Structures*, **43**, 4720-4738.

Mori, T. ve Tanaka, K., (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica*, **21**, 571-574.

Sandru, N., (1966). On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity, *International Journal of Engineering Science,* **4**, 81-94.